定理 9.1 (Laurent 展開) $\alpha \in \mathbf{C}$, $0 < R_1 < R_2$ とする. 一価複素関数 f が $\bar{D} = \{z \mid R_1 \leq |z - \alpha| \leq R_2\}$ を含む領域で正則ならば, f は $\bar{D}$ の内部 $D = \{z \mid R_1 < |z - \alpha| < R_2\}$ において

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-\alpha|=r} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}} dw \cdot (z-\alpha)^n, \quad z \in D$$

と表わすことができる. ここで, r は $R_1 \leq r \leq R_2$ なる任意の実数である.

(証明)

定理 8.7 (Taylor 展開) と同様の議論を行えばよい.

$\alpha = 0$ として示す. 正則性の仮定と Cauchy の積分公式により

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R_2} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R_1} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad z \in D$$

が成り立つ. そこで, $|w| = R_2$, $|z| < R_2$ のときは, $N \in \mathbf{N}$ として

$$\left| \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{w^{n+1}} - \frac{1}{w-z} \right| = \left| \frac{1}{w} \cdot \frac{1 - (z/w)^{N+1}}{1 - z/w} - \frac{1}{w-z} \right| = \left| \frac{-(z/w)^{N+1}}{w-z} \right| \leq \frac{(|z|/R_2)^{N+1}}{R_2 - |z|}$$

より, $\frac{|z|}{R_2} < 1$ に注意して

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^N \oint_{|w|=R_2} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \cdot z^n - \oint_{|w|=R_2} \frac{f(w)}{w-z} dw \right| \\ &= \left| \oint_{|w|=R_2} \sum_{n=0}^N \left(\frac{z^n}{w^{n+1}} - \frac{1}{w-z} \right) f(w) dw \right| \\ &\leq \oint_{|w|=R_2} \left| \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{w^{n+1}} - \frac{1}{w-z} \right| |f(w)| |dw| \\ &\leq \frac{(|z|/R_2)^{N+1}}{R_2 - |z|} \cdot \max_{|w|=R_2} |f(w)| \cdot \oint_{|w|=R_2} |dw| \\ &= \frac{(|z|/R_2)^{N+1}}{R_2 - |z|} \cdot \max_{|w|=R_2} |f(w)| \cdot 2\pi R_2 \quad \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

よって

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R_2} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \cdot z^n$$

また, $|w| = R_1$, $R_1 < |z|$ のときは, $N \in \mathbf{N}$ として

$$\left| -\sum_{n=0}^N \frac{w^n}{z^{n+1}} - \frac{1}{w-z} \right| = \left| \frac{-1}{z} \cdot \frac{1 - (w/z)^{N+1}}{1 - w/z} - \frac{1}{w-z} \right| = \left| \frac{(w/z)^{N+1}}{w-z} \right| \leq \frac{(R_1/|z|)^{N+1}}{|z| - R_1}$$

より, $\frac{R_1}{|z|} < 1$ に注意して

$$\left| -\sum_{n=0}^N \oint_{|w|=R_1} w^n f(w) dw \cdot \frac{1}{z^{n+1}} - \oint_{|w|=R_1} \frac{f(w)}{w-z} dw \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \oint_{|w|=R_1} \sum_{n=0}^N \left(-\frac{w^n}{z^{n+1}} - \frac{1}{w-z} \right) f(w) dw \right| \\
&\leq \oint_{|w|=R_1} \left| -\sum_{n=0}^N \frac{w^n}{z^{n+1}} - \frac{1}{w-z} \right| |f(w)| |dw| \\
&\leq \frac{(R_1/|z|)^{N+1}}{|z|-R_1} \cdot \max_{|w|=R_1} |f(w)| \cdot \oint_{|w|=R_1} |dw| \\
&= \frac{(R_1/|z|)^{N+1}}{|z|-R_1} \cdot \max_{|w|=R_1} |f(w)| \cdot 2\pi R_1 \quad \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R_1} w^n f(w) dw \cdot \frac{1}{z^{n+1}}$$

以上より

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R_2} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \cdot z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R_1} w^n f(w) dw \cdot \frac{1}{z^{n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R_2} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \cdot z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R_1} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \cdot z^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \cdot z^n
\end{aligned}$$

が得られた。最後に積分路を $|z|=r$ に変更したのは f の正則性と Cauchy の積分定理による。

定理 9.2(留数定理) 一価複素関数 f が領域 D において有限個の特異点をもつとき, D に含まれ, 特異点を通らない任意の閉曲線 C について

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \operatorname{Res}_{z=c_j} f(z)$$

が成り立つ. ただし, $c_1, c_2, \dots, c_N$ は C の内部に含まれる特異点である.

(証明)

$N = 1$ のとき, すなわち C が内部に唯一の特異点 $z = c$ を含むとき, $r > 0$ を十分小さくにとって, 定理 9.1 により

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-c|=r} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}} dw \cdot (z-c)^n \quad (0 < |z-c| < r)$$

と表わすことができる. $z = c$ における留数 $\operatorname{Res}_{z=c} f(z)$ とは, このように Laurent 展開したときの $(z-c)^{-1}$ の係数

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-c|=r} f(w) dw$$

のことであったから, Cauchy の定理により積分路が変更できることと合わせて

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{|w-c|=r} f(w) dw = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=c} f(z)$$

を得る.

一般の場合は, やはり Cauchy の定理より $r > 0$ を十分小さくとれば

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{|w-c_1|=r} f(w) dw + \oint_{|w-c_2|=r} f(w) dw + \dots + \oint_{|w-c_N|=r} f(w) dw$$

とできることに注意すればよい.