定理 8.1　冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ について，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \rho \in \mathbf{R}\cup\{\infty\}$ が存在するとき，次が成り立つ：

(i) $|z-\alpha| < \rho$ ならば冪級数は絶対収束する．特に，$\rho=\infty$ のときはすべての $z\in\mathbf{C}$ に対して冪級数は絶対収束する．

(ii) $|z-\alpha| > \rho$ $(\rho\neq\infty)$ ならば冪級数は発散する．

(証明) ....

$\alpha=0$ として示す．

(i) $\rho\in\mathbf{R}$ とする．$|z|<\rho$ ならば，$|z|\le\rho-\varepsilon$ となる $\varepsilon>0$ がとれるが，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \rho$ より，ある $N\in\mathbf{N}$ が存在して $n\ge N \Rightarrow \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| > \rho-\frac{\varepsilon}{2}$ となる．このとき

$$|a_{n+1}z^{n+1}| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||z||a_nz^n| \le \frac{\rho-\varepsilon}{\rho-\varepsilon/2}|a_nz^n|$$

から $|a_nz^n| \le \left(\frac{\rho-\varepsilon}{\rho-\varepsilon/2}\right)^{n-N}|a_Nz^N|\quad (n\ge N)$ が得られる．よって，

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nz^n| = \sum_{n=0}^{N-1}|a_nz^n| + \sum_{n=N}^{\infty}|a_nz^n| \le \sum_{n=0}^{N-1}|a_nz^n| + \sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{\rho-\varepsilon}{\rho-\varepsilon/2}\right)^{n-N}|a_Nz^N|$$

となるが，$\left|\frac{\rho-\varepsilon}{\rho-\varepsilon/2}\right| < 1$ であるからこの級数は収束する．

また，$\rho=\infty$ のときは，$\forall z\in\mathbf{C}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||z| = 0$ となるから，ある $N\in\mathbf{N}$ が存在して $n\ge N \Rightarrow \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right||z| \le \frac{1}{2}$，従って $|a_{n+1}z^{n+1}| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||z||a_nz^n| \le \frac{1}{2}|a_nz^n|$ $(n\ge N)$ となる．これより上と同様にして $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|a_nz^n|$ が収束することがわかる．

(ii) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ が収束するためには $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_nz^n = 0$ でなければならないが，$|z|>\rho$ のとき，(i) と同様の議論で $\varepsilon>0$ と $N\in\mathbf{N}$ が存在して $|a_nz^n| \ge \left(\frac{\rho+\varepsilon}{\rho+\varepsilon/2}\right)^{n-N}|a_Nz^N|\quad (n\ge N)$ となるから，これは不可能である．

定理 8.2　冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ について，$\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho}$ とする ($\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ のときは $\rho = \infty$ とする) とき，次が成り立つ：

(i) $|z-\alpha| < \rho$ ならば冪級数は絶対収束する．特に，$\rho = \infty$ のときはすべての $z \in \mathbf{C}$ に対して冪級数は絶対収束する．

(ii) $|z-\alpha| > \rho$ $(\rho \neq \infty)$ ならば冪級数は発散する．

(証明) ....

$\alpha = 0$ として示す．

(i) $\rho \in \mathbf{R}$ とする．$|z| < \rho$ ならば，$|z| \le \rho - \varepsilon$ となる $\varepsilon > 0$ がとれるが，$\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{N\to\infty} \sup_{n\ge N} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ より，ある $N \in \mathbf{N}$ が存在して $\displaystyle\sup_{n\ge N} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho - \varepsilon/2}$ となる．このとき，$n \ge N$ ならば $|a_n z^n| = (\sqrt[n]{|a_n|}\,|z|)^n \le \left(\dfrac{\rho-\varepsilon}{\rho-\varepsilon/2}\right)^n$ だから，

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n z^n| + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n z^n| \le \sum_{n=0}^{N-1} |a_n z^n| + \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{\rho-\varepsilon}{\rho-\varepsilon/2}\right)^n$$

となるが，$\left|\dfrac{\rho-\varepsilon}{\rho-\varepsilon/2}\right| < 1$ であるからこの級数は収束する．

また，$\rho = \infty$ のときは，$\forall z \in \mathbf{C}$ に対して $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|z| = \lim_{N\to\infty} \sup_{n\ge N} \sqrt[n]{|a_n|}\,|z| = 0$ となるから，ある $N \in \mathbf{N}$ が存在して $\displaystyle\sup_{n\ge N} \sqrt[n]{|a_n|}\,|z| < \frac{1}{2}$．これより上と同様にして $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ が収束することがわかる．

(ii) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が収束するためには $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n z^n = 0$ でなければならないが，$|z| > \rho$ のとき，(i) と同様の議論で $\varepsilon > 0$ と $N \in \mathbf{N}$ が存在して $|a_n z^n| \ge \left(\dfrac{\rho+\varepsilon}{\rho+\varepsilon/2}\right)^n$　$(n \ge N)$ となるから，これは不可能である．

定理 8.3　冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ が $z=z_0\neq 0$ で収束するとき，次が成り立つ：

(1) $|z-\alpha|<|z_0-\alpha|$ のとき，この級数は絶対収束する.

(2) $0<R<|z_0-\alpha|$ となる実数 R をとると，$|z-\alpha|\leq R$ においてこの級数は一様収束する.

(証明) ....

$\alpha=0$ として示す.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n$ が収束することより $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n {z_0}^n=0$ であるから，ある $N\in\mathbf{N}$ が存在して $n\geq N\Rightarrow |a_n{z_0}^n|<1$ すなわち $|a_n|<\dfrac{1}{|z_0|^n}$ となる．このとき，

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n z^n| = \sum_{n=0}^{N-1}|a_n z^n| + \sum_{n=N}^{\infty}|a_n z^n| \leq \sum_{n=0}^{N-1}|a_n z^n| + \sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n$$

となるから，$|z|<|z_0|$ のときこの級数は収束する.

(2) (1) より，$0<R<|z_0|$ のとき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ は絶対収束する．すなわち，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|R^n<\infty$ であるから，

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{|z|\leq R}\left|\sum_{n=N}^{\infty}a_n z^n\right| \leq \lim_{N\to\infty}\sup_{|z|\leq R}\sum_{n=N}^{\infty}|a_n z^n| \leq \lim_{N\to\infty}\sum_{n=N}^{\infty}|a_n|R^n = 0$$

となり，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は $|z|\leq R$ において一様収束する.

補題 8.4　関数 f が領域 D で正則ならば，各 $z \in D$ に対して $r > 0$ を十分小さくとることにより

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

と表わせる．

(証明) ……………………………………………………………………………………

Cauchy の積分公式より $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw$ と表わせるから，$|\Delta z|$ が十分小さいならば

$$\begin{aligned}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z|=r} \left\{ \frac{1}{w-(z+\Delta z)} - \frac{1}{w-z} \right\} f(w) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{(w-z-\Delta z)(w-z)} dw\end{aligned}$$

となる．そこで，$|\Delta z| < r/2$ となるようにとると，$\displaystyle\oint_{|w-z|=r} |dw| = 2\pi r$ に注意して

$$\begin{aligned}&\left| \oint_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{(w-z-\Delta z)(w-z)} dw - \oint_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \right| \\ &\qquad = \left| \oint_{|w-z|=r} \frac{\Delta z}{(w-z-\Delta z)(w-z)^2} f(w) dw \right| \\ &\qquad \leq \oint_{|w-z|=r} \frac{|\Delta z|}{(|w-z|-|\Delta z|)|w-z|^2} |f(w)|\ |dw| \\ &\qquad \leq \oint_{|w-z|=r} \frac{|\Delta z|}{(r-r/2)r^2} |f(w)|\ |dw| \\ &\qquad = |\Delta z| \cdot \frac{2}{r^3} \max_{|w-z|=r} |f(w)| \oint_{|w-z|=r} |dw| \quad \underset{\Delta z \to 0}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

から

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

が得られる．

念のために $|dw|$ の意味を確認しておこう．一般に，複素関数 $f(z)$ の曲線 $C = \{\, z(t) \mid t_1 \leq t \leq t_2 \,\}$ に沿う積分は

$$\int_C f(z) dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t)) z'(t) dt$$

により定義されるのであった．このとき，$|dz| = |z'(t)|dt$ であって

$$\left| \int_C f(z) dz \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(z(t)) z'(t) dt \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(z(t))||z'(t)| dt = \int_C |f(z)|\ |dz|$$

が成り立つ．特に

$$\int_C |dz| = \int_{t_1}^{t_2} |z'(t)| dt$$

は曲線 C の長さを表す．上で見た計算においては $w=z+re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ とおけば $dw = rie^{i\theta}d\theta$ であるから

$$\oint_{|w-z|=r} |dw| = \int_0^{2\pi} \left|rie^{i\theta}\right| d\theta = \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi r$$

と，確かに円周の長さとなる．

定理 8.5　領域 D で正則な関数の列 $u_n(z)$ $(n=1,2,\ldots)$ について，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ が D 上で正則関数 $u(z)$ に一様収束する，すなわち $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sup_{z\in D}\left|\sum_{n=1}^{N} u_n(z)-u(z)\right|=0$ が成り立つとする．このとき，$\displaystyle u(z)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ は D において項別微分可能である．すなわち，$\forall z\in D$ に対して $\displaystyle\frac{d}{dz}u(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dz}u_n(z)$ が成り立つ．

(証明) ……………………………………………………………………………………………

$\displaystyle S_N(z)=\sum_{n=1}^{N} u_n(z)$ とおくと，$\displaystyle S_N'(z)=\sum_{n=1}^{N} u_n'(z)$ であるが，前補題により $\forall z\in D$ に対して $r>0$ を十分小さくとると

$$S_N{}'(z)=\frac{1!}{2\pi i}\oint_{|w-z|=r}\frac{S_N(w)}{(w-z)^2}dw,\qquad u'(z)=\frac{1!}{2\pi i}\oint_{|w-z|=r}\frac{u(w)}{(w-z)^2}dw$$

と表せる．これより

$$\begin{aligned}\left|S_N{}'(z)-u'(z)\right| &= \left|\frac{1!}{2\pi i}\oint_{|w-z|=r}\frac{S_N(w)-u(w)}{(w-z)^2}dw\right|\\ &\le \frac{1}{2\pi}\oint_{|w-z|=r}\frac{|S_N(w)-u(w)|}{|w-z|^2}|dw|\\ &\le \sup_{w\in D}|S_N(w)-u(w)|\cdot\frac{1}{2\pi}\oint_{|w-z|=r}\frac{|dw|}{|w-z|^2}\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\oint_{|w-z|=r}\frac{|dw|}{|w-z|^2}=\frac{1}{r^2}\oint_{|w-z|=r}|dw|=\frac{2\pi r}{r^2}=\frac{2\pi}{r}$ に注意すると

$$\left|S_N{}'(z)-u'(z)\right|\le\sup_{w\in D}|S_N(w)-u(w)|\cdot\frac{1}{r}$$

となり，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}S_N'(z)=u'(z)$，すなわち $\displaystyle u'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(z)$ が得られる．

定理 8.6　冪級数で表された関数 $u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ は，その収束域内で項別微分可能，すなわち

$$\frac{d}{dz}u(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-\alpha)^{n-1}$$

が成り立ち，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-\alpha)^{n-1}$ の収束域は一致する．

(証明) ……………………………………………………………………………………………

冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ の収束半径を $\rho > 0$ とし，収束域内の任意の点 z_0 に対して $R > 0$ を $|z_0 - \alpha| < R < \rho$ となるようにとる．このとき，$\{\, z \mid |z-\alpha| \leq R\}$ 上で (従って $\{\, z \mid |z-\alpha| < R\}$ 上でも) 級数は $u(z)$ に一様収束するから，項別微分が許されて $u'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z_0-\alpha)^{n-1}$ が成り立つ．

収束半径については，$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{\rho}$ が成り立つが，$\sqrt[n]{n|a_n|} \geq \sqrt[n]{|a_n|}$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ より

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} \geq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho}$$

また，一般に複素数列 (x_n)，(y_n) に対して $\limsup_{n\to\infty} |x_n y_n| \leq \limsup_{n\to\infty} |x_n| \cdot \limsup_{n\to\infty} |y_n|$ が成り立つから

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho}$$

よって $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \dfrac{1}{\rho}$，従って $u'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-\alpha)^{n-1}$ の収束半径も ρ である．

定理 8.7(Taylor 展開) $\alpha \in \mathbf{C}$，$R > 0$ とする．複素関数 f が閉円板 $\overline{D} = \{\, z \mid |z-\alpha| \le R \,\}$ を含む領域で正則ならば，f は $\overline{D}$ の内部 $D = \{\, z \mid |z-\alpha| < R \,\}$ において

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-\alpha|=R} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}} dw \cdot (z-\alpha)^n, \qquad z \in D$$

と冪級数展開できる．

(証明) ……………………………………………………………………………………

$\alpha = 0$ として示す．正則性の仮定と Cauchy の積分公式により

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R} \frac{f(w)}{w-z} dw, \qquad z \in D$$

が成り立つが，$|w| = R$，$|z| < R$ のとき $\left|\dfrac{z}{w}\right| < 1$ だから

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1-z/w} = \frac{1}{w}\left\{1 + \frac{z}{w} + \left(\frac{z}{w}\right)^2 + \cdots\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}}$$

従って

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \cdot z^n dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \cdot z^n$$

となり，結論を得る．と言いたいところだが，最後の部分で積分と無限和との順序交換を行っており，これを正当化するにはもう少し詳しく調べる必要がある．改めて，$|w| = R$，$|z| < R$ のとき，$N \in \mathbf{N}$ として

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{w^{n+1}} - \frac{1}{w-z}\right| = \left|\frac{1}{w} \cdot \frac{1-(z/w)^{N+1}}{1-z/w} - \frac{1}{w-z}\right| = \left|\frac{-(z/w)^{N+1}}{w-z}\right| \le \frac{(|z|/R)^{N+1}}{R-|z|}$$

となるから

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=0}^{N} \oint_{|w|=R} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \cdot z^n - \oint_{|w|=R} \frac{f(w)}{w-z} dw\right| \\
&\qquad = \left|\oint_{|w|=R} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{z^n}{w^{n+1}} - \frac{1}{w-z}\right) f(w) dw\right| \\
&\qquad \le \oint_{|w|=R} \left|\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{w^{n+1}} - \frac{1}{w-z}\right| \, |f(w)| \, |dw| \\
&\qquad \le \frac{(|z|/R)^{N+1}}{R-|z|} \cdot \max_{|w|=R} |f(w)| \cdot \oint_{|w|=R} |dw| \\
&\qquad \le \frac{(|z|/R)^{N+1}}{R-|z|} \cdot \max_{|w|=R} |f(w)| \cdot 2\pi R \qquad \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

よって

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \cdot z^n$$

が得られた．

定理 8.8(Cauchy の積分公式の拡張)　複素関数 f が領域 D で正則ならば，f は D の各点で任意回微分可能で，その n $(\in \mathbf{N})$ 階微分係数は

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|w-\alpha|=r} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}} dw, \qquad \alpha \in D$$

により与えられる．ここで，$r > 0$ は $\{\, z \mid |z-\alpha| < r \,\} \subset D$ となるように十分小さくとる．

(証明) ……………………………………………………………………………………

定理 8.1 により，f は開円板 $D_r = \{\, z \mid |z-\alpha| < r \,\}$ において

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-\alpha|=r} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{m+1}} dw \cdot (z-\alpha)^m, \qquad z \in D_r$$

と冪級数展開できる．冪級数は収束円内で項別微分が (何回でも) 許されるのであるから，f は D_r の各点で任意回微分可能であって

$$f^{(n)}(z) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|w-\alpha|=r} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{m+1}} dw \cdot (z-\alpha)^{m-n}, \qquad z \in D_r$$

が成り立つ．特に $z = \alpha$ とすれば

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|w-\alpha|=r} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}} dw$$

が得られる．