

定理 6.1 複素関数 f が, ある領域 D で正則な関数 F によって $f(z) = F'(z)$ ($z \in D$) と表されるとき, D 内で点 a から点 b に到る任意の曲線 C に対して

$$\int_C f(z)dz = F(b) - F(a)$$

が成り立つ

(証明)

$a = a_x + a_y i$ から $b = b_x + b_y i$ へ至る曲線を $C = \{x(t) + y(t)i \mid t_1 \leq t \leq t_2\}$ とする. また, $F(x + yi) = U(x, y) + V(x, y)i$, $f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ と表わすと, F の正則性より

$$\begin{cases} U_x(x, y) = V_y(x, y) \\ U_y(x, y) = -V_x(x, y) \end{cases} \quad (x + yi \in D)$$

および $U_x(x, y) = u(x, y)$, $V_x(x, y) = v(x, y)$ が成り立つ. これらより

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{U(x(t), y(t)) + V(x(t), y(t))i\} \\ &= U_x(x(t), y(t))x'(t) + U_y(x(t), y(t))y'(t) + \{V_x(x(t), y(t))x'(t) + V_y(x(t), y(t))y'(t)\}i \\ &= U_x(x(t), y(t))x'(t) - V_x(x(t), y(t))y'(t) + \{V_x(x(t), y(t))x'(t) + U_x(x(t), y(t))y'(t)\}i \\ &= u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t) + \{v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)\}i \end{aligned}$$

となるから, この両辺を t_1 から t_2 まで積分することにより

$$\{U(b_x, b_y) + V(b_x, b_y)i\} - \{U(a_x, a_y) + V(a_x, a_y)i\} = \int_{\tilde{C}} u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_{\tilde{C}} v(x, y)dx + u(x, y)dy$$

を得る. ただし, $\tilde{C} = \{(x(t), y(t)) \mid t_1 \leq t \leq t_2\}$ である. これが示すべきことであった.

定理 6.2 複素関数 f が単連結領域 D で正則ならば, D に含まれる任意の閉曲線 C について

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

が成り立つ

(略称)

$f(x+yi) = u(x, y) + v(x, y)i$, $C = \{x(t) + y(t)i \mid t_1 \leq t \leq t_2\}$ と表わすと

$$\oint_C f(z)dz = \int_{\tilde{C}} u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_{\tilde{C}} v(x, y)dx + u(x, y)dy$$

となる ($\tilde{C} = \{(x(t), y(t)) \mid t_1 \leq t \leq t_2\}$ である) が, ここで u, v に C^1 級の条件を課すと, 平面における Green の公式が適用できて

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_{\tilde{C}} u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_{\tilde{C}} v(x, y)dx + u(x, y)dy \\ &= \iint_{\tilde{D}} \{-v_x(x, y) - u_y(x, y)\}dxdy + i \iint_{\tilde{D}} \{u_x(x, y) - v_y(x, y)\}dxdy \end{aligned}$$

となり ($\tilde{D}$ は $\tilde{C}$ で囲まれる領域), Cauchy-Riemann の関係式

$$\begin{cases} u_x(x, y) = v_y(x, y) \\ u_y(x, y) = -v_x(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in \tilde{D}$$

によりこの積分は 0 となる.

定理 6.3 複素関数 f が単連結領域 D で正則ならば, D に含まれる任意の閉曲線 C および C の内部の点 a について

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

が成り立つ.

(証明)

$\varepsilon > 0$ を閉円板 $\{z \mid |z-a| \leq \varepsilon\}$ が C の内部に含まれるようにとると, Cauchy の定理により

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

となるが, さらに $z = a + \varepsilon e^{i\theta}$ とおくと $\frac{dz}{z-a} = \frac{i\varepsilon e^{i\theta} d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}} = i d\theta$ より

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} f(a + \varepsilon e^{i\theta}) \cdot i d\theta$$

と表わせる. ここで, 正数 $\rho > 0$ を任意にとると, f が a で連続であることより, 必要ならさらに ε を小さくとり直して

$$|f(a + \varepsilon e^{i\theta}) - f(a)| < \rho, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

とすることができるから, このとき

$$\begin{aligned} \left| \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz - 2\pi i f(a) \right| &= \left| i \int_0^{2\pi} f(a + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta - 2\pi i f(a) \right| \\ &= \left| i \int_0^{2\pi} \{f(a + \varepsilon e^{i\theta}) - f(a)\} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |f(a + \varepsilon e^{i\theta}) - f(a)| d\theta \\ &\leq 2\pi \rho \end{aligned}$$

となる. ρ は任意であるから結論が得られた.