定理 4.1　複素関数 $f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$ が点 $z_0 = x_0 + y_0 i$ で微分可能ならば，u，v は点 (x_0, y_0) で偏微分可能であって，Cauchy-Riemann の関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

を満たす.

(証明) ……………………………………………………………………………………………

$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ とおく．f が点 $x_0 + y_0 i$ で微分可能ならば，極限

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\
&\qquad = \lim_{\Delta x + i\Delta y \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0) + i\{v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0)\}}{\Delta x + i\Delta y}
\end{aligned}$$

が存在する．この極限は $\Delta x + i\Delta y$ をどの方向から 0 に近づけても同じ値に収束するはずであるから，特に，$\Delta y = 0$ とした極限を考えると

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{\Delta x + \Delta y i \to 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0) + i\{v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0)\}}{\Delta x + i\Delta y} \\
&\qquad = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0,y_0) + i\{v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0,y_0)\}}{\Delta x} \\
&\qquad = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)
\end{aligned}$$

同様に，$\Delta x = 0$ とした極限を考えると

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{\Delta x + \Delta y i \to 0 \\ \Delta x = 0}} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0) + i\{v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0)\}}{\Delta x + i\Delta y} \\
&\qquad = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0) + i\{v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0)\}}{i\Delta y} \\
&\qquad = \frac{1}{i}\left\{\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\right\} \\
&\qquad = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)
\end{aligned}$$

これらの実部，虚部を比べることにより Cauchy-Riemann の関係式が得られる.

定理 4.2　複素関数 $f(x+yi)=u(x,y)+iv(x,y)$ について，u，v が点 (x_0,y_0) のある近傍においてがともに C^1 級であって，Cauchy-Riemann の関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0),\quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

を満たすならば，f は点 $z_0=x_0+y_0 i$ で微分可能である．

(証明) ....

$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ とし

$$\Delta u(x_0,y_0)=u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)$$
$$\Delta v(x_0,y_0)=v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)$$

とおく．u．v が点 (x_0,y_0) のある近傍で C^1 級ならば全微分可能であるから，Δx，Δy が十分小さいとき

$$\Delta u(x_0,y_0)=u_x(x_0,y_0)\Delta x+u_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\Delta x,\ \Delta y)$$
$$\begin{aligned}\Delta v(x_0,y_0)&=v_x(x_0,y_0)\Delta x+v_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\Delta x,\ \Delta y)\\&=-u_y(x_0,y_0)\Delta x+u_x(x_0,y_0)\Delta y+o(\Delta x,\ \Delta y)\end{aligned}$$

と表せる．ここで，$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}$，$u_y=\frac{\partial u}{\partial y}$，$v_x=\frac{\partial v}{\partial x}$，$v_y=\frac{\partial v}{\partial y}$ であり，$\Delta v(x_0,y_0)$ について Cauchy-Riemann の関係式を用いた．また，$o(\Delta x,\ \Delta y)$ は $\displaystyle\lim_{(\Delta x.\Delta y)\to(0,0)}\frac{|o(\Delta x,\ \Delta y)|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$ となる項を表す．これより，

$$\begin{aligned}f(z_0+\Delta z)-f(z_0)&=\Delta u(x_0,y_0)+i\Delta v(x_0,y_0)\\&=u_x(x_0,y_0)\Delta x+u_y(x_0,y_0)\Delta y\\&\qquad+i\{-u_y(x_0,y_0)\Delta x+u_x(x_0,y_0)\Delta y\}+o(\Delta x,\ \Delta y)\\&=\{u_x(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0)\}(\Delta x+i\Delta y)+o(\Delta x,\ \Delta y)\end{aligned}$$

よって

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=u_x(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0)+\frac{o(\Delta x,\ \Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}$$

となるが，$\Delta z\to 0$ すなわち $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ のとき $\left|\dfrac{o(\Delta x,\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}\right|=\dfrac{|o(\Delta x,\Delta y)|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\to 0$ であることから

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=u_x(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0)$$

が得られる．従って，f は $z_0=x_0+y_0 i$ で微分可能である．